N.B. – *Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation.*
Les questions 1 et 2 de la partie III sont totalement indépendantes du reste du problème.

Préambule:

$\mathbb{R}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à une indéterminée sur le corps des réels. Nous attribuerons au polynôme nul le degré $-\infty$. Soit f une fonction réelle d'une variable réelle de classe C^∞. On choisit $n+1$ réels $\alpha_0, \alpha_1, ,\alpha_n$ tels que $\alpha_0 < \alpha_1 < ... < \alpha_n$ et $n+1$ entiers naturels $k_0, k_1, ,k_n$. On suppose connues les valeurs $f(\alpha_i), f'(\alpha_i),...,f^{(k_i)}(\alpha_i)$ de f et de ses dérivées successives en α_i pour tout $i \in \{0,1,...,n\}$. On note $N = \left(\sum_{i=0}^{i=n} k_i\right) + n$.

On cherche le polynôme d'interpolation $P \in \mathbb{R}[X]$ de f tel que:

$$d^\circ P \leq N \text{ et } \forall i \in \{0,1,...,n\} \quad \forall j \in \{0,1,...,k_i\} \quad P^{(j)}(\alpha_i) = f^{(j)}(\alpha_i).$$

I- Existence et unicité de *P*:

$\mathbb{R}_N[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus N. On considère l'application:

$$\varphi: \begin{cases} \mathbb{R}_N[X] \to \mathbb{R}^{N+1} \\ Q \mapsto \left(Q(\alpha_0),...,Q^{(k_0)}(\alpha_0),Q(\alpha_1),...,Q^{(k_1)}(\alpha_1),...,Q(\alpha_n),...,Q^{(k_n)}(\alpha_n)\right) \end{cases}$$

1°) Montrer que cette application φ est un isomorphisme d'espace vectoriel.

2°) En déduire l'existence et l'unicité du polynôme P défini dans le préambule.

II- Détermination de *P*:

1°) Montrer qu'il existe des polynômes $P_0, P_1, ,P_{n+1}$ et $R_0, R_1,...,R_n$ de $\mathbb{R}[X]$ tels que:

$$P_0 = P$$

et

$$\forall i \in \{0,...,n\} \quad P_i = (X-\alpha_i)^{k_i+1} P_{i+1} + R_i \text{ avec } d^\circ R_i \leq k_i.$$

2°) Montrer que P_{n+1} est le polynôme nul.

3°) Comparer $P_i^{(j)}(\alpha_i)$ et $R_i^{(j)}(\alpha_i)$ pour tout $j \in \{0,1,...,k_i\}$.

4°)

a/ Montrer que, pour tout $i \in \{0,1,...,n\}$ on peut écrire $R_i = \sum_{k=0}^{k=k_i} a_{ik}(X-\alpha_i)^k$ où les a_{ik} sont des coefficients réels.

b/ Calculer les coefficients a_{ik} à l'aide des valeurs de P_i et de ses dérivées en α_i.

5°) Exprimer le polynôme P à l'aide des polynômes R_i et des polynômes $(X-\alpha_i)$. Que retrouve-t-on lorsqu'on choisit $n=0$?

III- Programmation:

1°) Soit $A_0=\sum_{k=0}^{p}\lambda_{0,k}X^k$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et a un réel.

a/ Justifier l'existence d'une famille de polynômes $(A_i)_{1\le i\le p}$ de $\mathbb{R}[X]$ et d'une famille de réels $(\lambda_{i+1,i})_{0\le i\le p}$ tels que:

$$\forall i\in\{0,1,...,p-1\}\quad A_i=(X-a)A_{i+1}+\lambda_{i+1,i}\text{ avec d°}(A_i)\le p-i$$
$$A_p=\lambda_{p+1,p}$$

b/ En déduire l'expression du polynôme A_0 comme combinaison linéaire des polynômes $1,(X-a),(X-a)^2,.....,(X-a)^p$.

c/ Exprimer les valeurs du polynôme A_0 et de ses dérivées $A_0',A_0'',.....,A_0^{(p)}$ au point a en fonction des coefficients $\lambda_{1,0};\lambda_{2,1};.....;\lambda_{p+1,p}$.

d/ Pour tout entier i compris entre 0 et p on écrit $A_i=\sum_{k=0}^{p-i}\lambda_{i,k+i}.X^k$. Exprimer les coefficients $\lambda_{i+1,k}$ pour $k\in\{i,...,p\}$ en fonction des coefficients de A_i.

e/ Une constante `p=20` et un type `Poly=Array[0..p] Of Real` étant définis, écrire une procédure Turbo-Pascal `Der_P` dont l'en-tête est:

```
PROCEDURE Der_P(A0:Poly;p:Integer;a:Real;VAR B:Poly);
```

qui permette de stocker dans `B[0], B[1], ... , B[p]` les valeurs du polynôme A_0 et de ses dérivées $A_0',A_0'',.....,A_0^{(p)}$ au point a.

2°) Soit f_0 une fonction réelle d'une variable réelle ayant des dérivées jusqu'à l'ordre p en un point a. Soit b un réel différent de a et q un entier naturel. On note f_q la fonction définie pour tout réel $x\neq b$ en lequel la fonction f_0 existe par: $f_q(x)=\dfrac{f_0(x)}{(x-b)^q}$.

a/ Exprimer $f_1(a),f_1'(a),f_1''(a),...,f_1^{(p)}(a)$ à l'aide de $f_0(a),f_0'(a),f_0''(a),...,f_0^{(p)}(a)$.

b/ On suppose définie une constante `p=20` et un type `Tab_Derive=Array[0..p] Of Real`. Écrire une procédure Turbo-Pascal `Der_F` dont l'en tête est:

```
PROCEDURE Der_F(f:Tab_Derive;a,b:Real;q:Integer;Var g=Tab_Derive);
```

qui permette de stocker dans `g[0], g[1], ... , g[p]` les valeurs de $f_q(a), f_q'(a), f_q''(a), \ldots, f_q^{(p)}(a)$, alors que les valeurs de $f_0(a), f_0'(a), f_0''(a), \ldots, f_0^{(p)}(a)$ sont rangées dans `f[0], f[1], ... , f[p]`.

3°) On revient dans cette question à la détermination des polynômes P_i et R_i définis dans la partie II. On suppose que l'entier N défini dans le préambule est inférieur ou égal à 20

a/ Montrer que, connaissant les valeurs $f(\alpha_i), f'(\alpha_i), \ldots, f^{(k_i)}(\alpha_i)$ de f et de ses dérivées successives en α_i pour tout $i \in \{0,1,\ldots,n\}$, on peut obtenir les coefficients a_{0k} pour $k \in \{0,1,\ldots,k_0\}$ du polynôme R_0 défini dans la partie III

b/ Expliquer comment on peut utiliser les procédures `Der_P` et `Der_F` définies ci-dessus pour déterminer les coefficients $a_{1,k}$ pour $k \in \{0,1,\ldots,k_1\}$ du polynôme R_1.